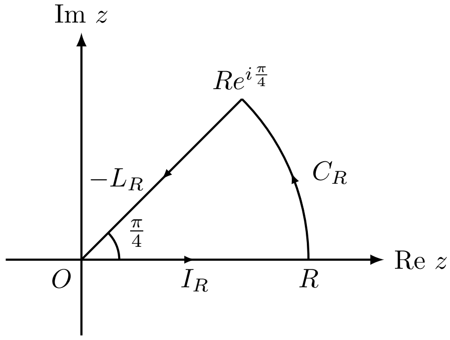
Fresnel 積分

Theorem. (Fresnel 積分)

$$\int_0^\infty \sin x^2 dx = \int_0^\infty \cos x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

が成り立つ.

Proof. 複素積分を用いる. $f(z) = e^{-z^2}$ とすると, $f(z)$ は $\mathbb{C}$ 上正則である. そこで, 以下のように積分路をとる.



$$I_R : z(t) = t \ (-R \leq t \leq R), C_R : z(t) = Re^{it} \ \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}\right), L_R : z(t) = te^{i\frac{\pi}{4}} \ (0 \leq t \leq R)$$

このとき, Cauchy の積分定理より

$$\int_{I_R} f(z)dz + \int_{C_R} f(z)dz = \int_{L_R} f(z)dz$$

が成り立つ. ここで

$$\lim_{R\to\infty} \int_{I_R} f(z)dz = \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

であり

$$\begin{aligned}
\left|\int_{C_R} f(z)dz\right| &= \left|\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2 e^{2it}} iRe^{it} dt\right| \\
&\leq R\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\cos 2t} dt \ (\because \text{三角不等式}) \\
&= \frac{R}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2 \sin u} du \ \left(\because t = \frac{\pi}{4} - \frac{u}{2}\right) \\
&\leq \frac{R}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2}{\pi}R^2 u} du \ \left(\because \sin u \geq \frac{2}{\pi}u\right) \\
&= \frac{\pi}{4R}(1 - e^{-R^2})
\end{aligned}$$

より

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)dz = 0$$

となる. さらに

$$\begin{aligned}
\int_{L_R} f(z)dz &= \frac{1+i}{\sqrt{2}} \int_0^R e^{-it^2} dt \\
&= \frac{1+i}{\sqrt{2}} \int_0^R (\cos t^2 - i \sin t^2) dt
\end{aligned}$$

となるから, $R \to \infty$ とし t を x に変えると

$$\frac{1+i}{\sqrt{2}} \int_0^\infty (\cos x^2 - i \sin x^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

が得られるから, 両辺に $\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$ をかけて両辺の実部と虚部を比較すれば

$$\int_0^\infty \sin x^2 dx = \int_0^\infty \cos x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

が示される. ■